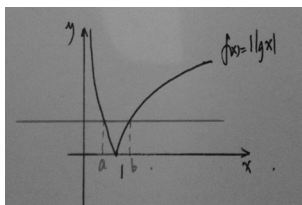


a, b 范围可得: $\lg a < 0, \lg b >$

$$0, \text{ 从而 } \begin{cases} \lg a = -t, \\ \lg b = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = e^{-t}, \\ b = e^t, \end{cases}$$

所以 $a+2b = \frac{1}{e^t} + 2e^t$, 而 $e^t > 0$,

所以 $2e^t + \frac{1}{e^t} \in (3, +\infty)$.



【点评】(1) 此类问题如果 $f(x)$ 图像易于作出, 可先作图以便于观察函数特点;

(2) 本题有两个关键点, 一个是引入辅助变量 t , 从而用 t 表示出 a, b , 达到消元效果, 但是要注意 t 是有范围的 (通过数形结合 $y=t$ 需与 $y=f(x)$ 有两交点); 一个是通过图像判断出 a, b 的范围, 从而去掉绝对值.

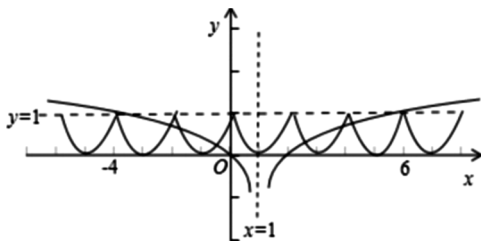
8. 【答案】C.

【解析】如图可知: $\frac{\sqrt{2}-1}{2} \leq x_1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq x_2 < 1, \therefore x_1 f(x_2)$

$$-f(x_2) = (x_1 - 1)f(x_2) = (x_1 - 1)f(x_1) = (x_1 - 1)(x_1 + \frac{1}{2}) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} = (x_1 - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16}.$$

$$-\frac{9}{16} \leq g(x) < g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

9. 【答案】D.



【解析】

由题意可得 $g(x) = f(x) - \log_5 |x-1|$, 根据周期性画出函数 $f(x) = (x-1)^2$ 的图像, 以及 $y = \log_5 |x-1|$ 的图像, 根据 $y = \log_5 |x-1|$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调增函数, 当 $x=6$ 时, $y = \log_5 |x-1| = 1$, $\therefore$ 当 $x > 6$ 时, $y = \log_5 |x-1| > 1$, 此时与函数 $y = f(x)$ 无交点, 再根据 $y = \log_5 |x-1|$ 的图像和 $f(x)$ 的图像都关于直线 $x=1$ 对称, 结合图像可知有 8 个交点, 则函数 $g(x) = f(x) - \log_5 |x-1|$ 的零点个数为 8, 故选 D.

【点评】判断函数 $y=f(x)$ 零点个数的常用方法: (1) 直接法: 令 $f(x)=0$ 则方程实根的个数就是函数零点的个; (2) 零点存在性定理法: 判断函数在区间 $[a, b]$ 上是连续不断的曲线, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 再结合函数的图像与性质 (如单调性、奇偶性、周期性、对称性) 可确定函数的零点个数; (3) 数形结合法: 转化为两个函数的图像的交点个数问题, 画出两个函数的图像, 其交点的个数就是函数零点的个数, 在一个区间上单调的函数在该区间内至多只有一个零点, 在确定函数零点的唯一性时往往要利用函数的单调性, 确定函数零点所在区间主要利用函数零点存在定理, 有时可结合函数的图

像辅助解题.

10. 【答案】 $[-1, 2] \cup [3, +\infty)$.

【解析】设 $b(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, 则 $b'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, 所以 $b(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $b(x) \geq b(1) = 1$ 且 $x \rightarrow +\infty, b(x) \rightarrow +\infty$, 故问题转化为方程 $f(x) = a$ 在 $[1, +\infty)$ 上有解, (1) 若 $a \leq 1$, 则 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) = x^2 - 2 \geq -1$, 所以 $-1 \leq a \leq 1$; (2) 若 $a > 1$, 则 $x \in [1, a)$ 时, $f(x) = x+2$, 此时 $3 \leq x+2 < a+2$. 由 $a > 1$ 及 $3 \leq a < a+2$ 可得 $a \geq 3$; 当 $x \in [a, +\infty)$ 时, $f(x) = x^2 - 2 \geq a^2 - 2$, 由 $a > 1$ 及 $a \geq a^2 - 2$ 可得 $1 < a \leq 2$, 综上可得: $-1 \leq a \leq 2$ 或 $a \geq 3$.

故答案为: $[-1, 2] \cup [3, +\infty)$.

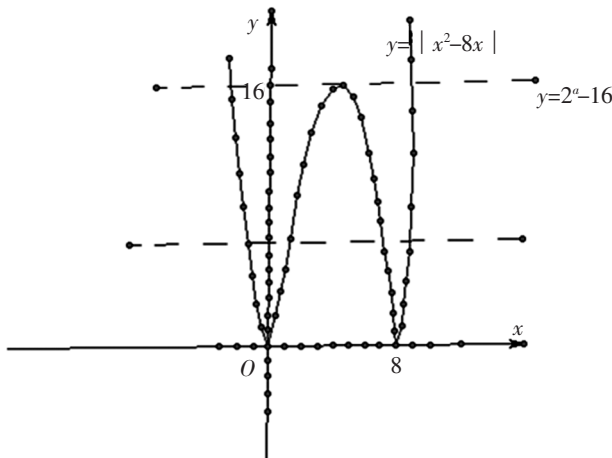
【点评】已知函数有零点求参数取值范围常用的方法和思路:

(1) 直接法: 直接根据题设条件构建关于参数的不等式, 再通过解不等式确定参数范围;

(2) 分离参数法: 先将参数分离, 转化成求函数值域问题加以解决;

(3) 数形结合法: 先对解析式变形, 在同一平面直角坐标系中, 画出函数的图像, 然后数形结合求解.

11. 【答案】 $(4, 5]$.



【解析】由 $f(x) = |8x - x^2| - 2^a + 16 = 0$ 可得 $2^a - 16 = |x^2 - 8x|$, 则问题转化为函数 $y = 2^a - 16, y = |x^2 - 8x|$ 的图像有至少三个交点, 结果图像可以看出当 $0 < 2^a - 16 \leq 16 \Rightarrow 16 < 2^a \leq 32$ 时, 即 $4 < a \leq 5$ 时满足题设, 应填答案 $(4, 5]$.

【点评】本题的求解过程体现了数形结合的数学思想的巧妙运用, 求解时先在同一平面直角坐标系中画出两个函数的图像, 进而借助图像的直观建立不等式 $0 < 2^a - 16 \leq 16 \Rightarrow 16 < 2^a \leq 32$, 进而通过解不等式求出参数的取值范围 $4 < a \leq 5$.

责任编辑 徐国坚